

位相空間論 (topology) と測度論 (measure theory) の歴史的交差点：CantorからBourbakiまで

位相空間論 (topology) と測度論 (measure theory) は、現代数学の基礎をなす2つの巨大な分野です。これらは決して無関係に誕生したわけではなく、「Georg Cantorによる集合論の誕生」と「実数直線上の解析学の厳密化」という共通の土壌から、双子のように影響を与え合いながら発展してきました。

本稿では、この2つの理論がどのように誕生し、どのように交差し、そして自立・融合していったのかを自己完結的 (self-contained) な形で解説します。

1. 共通の起源：Cantorの集合論 (1870年代～)

すべての始まりは、Georg CantorがFourier級数の収束・発散を研究していたことでした。Cantorは、実数直線 \mathbb{R} 上の「点の集まり」の性質を調べるうちに、「空間の構造」と「空間の大きさ」を分ける視点を持つようになります。ここから位相空間論の萌芽となる極限の概念が生まれました。

定義 (集積点と導来集合):

部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ と点 $x \in \mathbb{R}$ について、任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、区間 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ が x 以外の A の点を含むとき、 x を A の**集積点 (limit point)** と呼びます。

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

A のすべての集積点を集めた集合を A の**導来集合 (derived set)** と呼び、 A' と表します。

定義 (閉集合と開集合の歴史的誕生):

Cantorは1884年に発表した論文の第6部において、集合 A の導来集合 A' が元の集合 A に含まれている状態、すなわち $A' \subseteq A$ が成り立つとき、この集合 A を**閉集合 (abgeschlossene Menge / closed set)** と明確に定義しました。

一方で、現代の私たちが用いる**開集合 (open set)** という概念をCantor自身が直接定義したわけではありません。彼は「内点」に近い概念を用いていましたが、閉集合と双対をなす「開いた領域 (domaine ouvert)」としての開集合の概念を明確に定式化したのは、1899年のRené Baireの論文や、それに続くHenri Lebesgueの研究においてでした。

Cantorはまた、「点同士の近さ」に基づきながら、直感に反するような奇妙な集合を構成しました。これが有名な**Cantor集合 (Cantor set)** です。この集合は、「図形の大きさ」と「点の個数」が全く異なる概念であることを数学者たちに痛感させ、測度論発展の大きな原動力となりました。

例 (Cantor集合の構成と性質):

閉区間 $C_0 = [0, 1]$ から出発し、各区間の中央の3分の1の开区間を無限に取り除き続けることで得られる集合 C を考えます。

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right)$$

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

この集合は以下の驚くべき性質を兼ね備えています。

- **位相的性質:** C は閉集合 (closed set) の無限交叉なので閉集合です。また、内点を一切持たないため、**疎な集合 (nowhere dense)** です。さらに、 C は **clopen** (開集合かつ閉集合) な部分集合を基底として持つ、完全不連結な空間となります。
- **集合論的性質:** C の各点は3進数展開における0と2のみを用いた数列と1対1に対応するため、実数全体と同じく非可算無限の濃度を持ちます。
- **測度論的性質:** 取り除かれた区間の長さの合計は $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1$ となります。つまり C の長さは $1 - 1 = 0$ となり、**測度零集合 (measure zero set)** です。

2. 測度論の誕生と「位相」への依存 (1890年代~1900年代)

Cantorが定義した複雑な点集合の登場により、従来の「長方形で覆って測る」という素朴な面積・長さの定義 (Jordan測度など) では不十分になりました。ここで登場したのが、Émile Borelと Henri Lebesgueです。近代的な測度論は、誕生の瞬間からCantorや Baireによって整備されつつあった位相的アプローチ (開集合・閉集合) を土台としていました。

定義 (Borel集合族):

1898年、Borelは、すべての開集合 (open set) を含み、可算回の和集合と補集合を取る操作について閉じている最小の完全加法族 (σ -algebra) を考えました。これを**Borel集合族 (Borel σ -algebra)** と呼びます。Borelは、この複雑な集合族に対して矛盾なく長さを割り当てる **Borel測度 (Borel measure)** を構築しました。

続いて1902年、LebesgueはBorelの理論をさらに拡張し、任意の集合の「外側からの大きさ」を開集合 (open set) によって測る手法を編み出しました。

定義 (Lebesgue外測度):

実数直線上の任意の集合 A に対して、その外測度 (outer measure) $m^*(A)$ を、 A を覆う可算個の开区間列

$\{I_n\}$ の長さの合計の最小値として定義しました。

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{length}(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ は開区間} \right\}$$

この開区間 (開集合) を「ものさし」として用いるという発想により、Lebesgueは近代測度論と Lebesgue積分を完成させました。

3. 位相空間論の抽象化と独立 (1900年代~1910年代)

測度論がユークリッド空間の「大きさ」を測るために発展する一方で、Cantorや Baireが使っていた「近さ」や「極限」の概念そのものを抽象化する動きが進みました。これにより、位相空間論は測度 (量) から完全に独立した「構造の数学」となります。

1906年、Maurice Fréchetは実数直線の構造から「距離」の概念だけを抽出し、任意の集合に距離関数 $d(x, y)$ を備えた**距離空間 (metric space)** を定義しました。しかし、数学の真の抽象化はそれだけにとどまりませんでした。

定義 (位相空間の公理化):

1914年、Felix Hausdorffは著書『*Grundzüge der Mengenlehre*』において、「距離」すら存在しない抽象的な空間で極限を扱うため、各点 x に対する「近傍 (neighborhood)」の公理を定式化しました。これにより、現代の**位相空間 (topological space)** の概念が確立されました。

Hausdorff以降、位相空間論は実数の直感から離れ、例えば任意の開集合の閉包が再び開集合となるような極端に不連続な**超不連結 (extremally disconnected)** 空間など、距離や測度では捉えきれないエキゾチックな構造を持つ空間の研究へと大きく広がっていきました。

4. 「大きさ」を測る2つのアプローチの対比と限界

20世紀初頭、数学者たちは空間における「小さな集合」をどう定義するかで切磋琢磨しました。ここで、位相的な小ささと測度論的な小ささという、2つの全く異なる評価基準が確立されました。

定理 (Baireのカテゴリ一定理と位相的な「小ささ」):

1899年、René Baireは、完備距離空間 (例えば \mathbb{R}) において、「内点を持たない閉集合 (疎な集合)」の可算個の和集合として表される集合を**第1類集合 (meager / set of first category)** と定義しました。Baireのカテゴリ一定理は、「完備距離空間は決して第1類集合にはならない」と主張します。すなわち、位相的な意味で「スカスカな集合」を無限に集めても、空間全体を埋め尽くすことはできません。

興味深いことに、「Lebesgue測度零 (測度論的に小さい)」と「第1類集合 (位相的に小さい)」は直感に反してズレます。実数直線 \mathbb{R} は、測度零だが第1類ではない集合と、第1類だが測度零ではない集合の直和に分解できることが知られています。

また、すべての図形の大きさを測ることは不可能であることも、Giuseppe Vitaliによって証明されました。この証明には、位相とは無縁の「選択公理」が本質的な役割を果たします。

定理 (Vitali集合 : Lebesgue非可測集合の存在):

区間 $[0, 1]$ の実数について、その差が有理数になる $x - y \in \mathbb{Q}$ という関係を同値関係 \sim とします。選択公理 (Axiom of Choice) を用い、各同値類から代表元をちょうど1つずつ選んで集めた集合を **Vitali集合** V とします。 V を任意の有理数 $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ だけ平行移動した集合を $V_q = V + q$ とします。構成法から、各 V_q は互いに素であり、以下の関係が成り立ちます。

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_q V_q \subseteq [-1, 2]$$

もし V が **Lebesgue可測 (Lebesgue measurable)** で測度 $\mu(V)$ を持つなら、平行移動不変性から $\mu(V_q) = \mu(V)$ です。可算加法性により和集合の測度は $\sum \mu(V)$ となりますが、上の包含関係からこの値は 1 以上 3 以下でなければなりません。しかし、 $\mu(V) = 0$ なら総和は 0、 $\mu(V) > 0$ なら総和は ∞ となり、いずれにしても矛盾します。よって、 V の測度は定義できません。

5. Hausdorff以降の歴史 : 新たな交差点での融合 (1920年代~)

一度は独立した「位相 (構造)」と「測度 (量)」ですが、20世紀中盤に入ると、抽象代数学や関数解析学という新たな舞台で再び強烈に融合し始めます。

解析集合と記述集合論

Nikolai Luzinや Wacław Sierpińskiを中心とする学派は、Borel集合族の連続像である**解析集合 (analytic set)** を研究しました。この過程で、位相的に素性の良い集合と測度論的に素性の良い集合の間に、美しくも複雑な対応関係 (記述集合論) が存在することが明らかになりました。

Haar測度の発見

1932年、Alfréd Haarは巨大なブレイクスルーをもたらします。彼は、群の構造と位相の構造が両立する**局所コンパクト (locally compact)** な位相群の上には、群の作用 (平行移動) によって値が変わらない測度が「自動的に、本質的に一意に存在する」ことを証明しました。これが**Haar測度 (Haar measure)** です。空間の「位相的・代数的な構造」を指定するだけで、「固有の測度 (体積)」が勝手に決まるという驚くべき事実です。

確率論の公理化と位相への依存

1933年、Andrey Kolmogorovは確率論を「全測度が 1 の測度空間」として公理化しました。特に無限回のコイントスなどを扱う無限次元の確率空間を構成する際、Kolmogorovの拡張定理の証明には、位相空間論におけるコンパクト性 (Tychonoffの定理など) が不可欠な役割を果たしました。

関数解析学と Radon測度 (Bourbaki学派)

20世紀半ば、Nicolas Bourbakiや Laurent Schwartzらのフランス学派は、測度論を根本から再定義しました。Rieszの表現定理に基づき、「測度とは、局所コンパクト (locally compact) な位相空間上の連続関数の空間 $C_c(X)$ における線形汎関数 $\Phi(f) = \int f d\mu$ である」と定義したのです。これが**Radon測度 (Radon measure)** の思想です。ここでは、測度は完全に「位相空間上の関数解析」のパーツとして統合されました。

6. 全体の歴史の年表化

1874年 - 1884年

【黎明】Cantorの集合論と点集合論の誕生

Cantorが集積点、導来集合、閉集合 (closed set) などの位相的基礎を定義。特に1884年に閉集合を明確化。Cantor集合を通じて、点の数 (濃度) と図形の大きさ (測度) の概念の乖離を提示した。

1898年

【測定】Borelによる「測れる集合」の指定

Borelが開集合と閉集合を可算回組み合わせることができる Borel集合族 (Borel σ -algebra) に対する測度を定義。測度論が位相構造に依存して産声を上げた。

1899年

【構造】Baireによる「位相的な小ささ」と「開集合」の定義

Baireが開集合に相当する概念を明確化し、第1類集合 (meager) や疎な集合 (nowhere dense) の概念を導入 (Baireのカテゴリー定理)。測度とは異なる位相的な「空間の薄さ」の指標を確立。

1902年

【測定】Lebesgue測度と Lebesgue積分の完成

Lebesgueが開集合による被覆を用いた外測度から Lebesgue測度を完成。複雑な点集合の大きさが定義可能になり近代解析学の基礎が固まる。

1905年

【限界】Vitali集合の発見

Vitaliが選択公理を用いて Lebesgue非可測集合の存在を証明。測度論の限界と位相・集合論との対比が明確になる。

1906年

【構造】Fréchetによる距離空間の抽象化

実数直線に縛られていた近さを抽象化し、距離空間 (metric space) を定式化。

1914年

【独立】Hausdorffによる位相空間の公理化

近傍の概念を用いて距離すら不要な位相空間 (topological space) を公理化。測度から独立した純粋な構造の数学が確立。

1920年代～

【対比】記述集合論の発展

Luzinや Sierpińskiらにより解析集合 (analytic set) が研究され、位相的性質と測度論的性質の間の深いズレと対称性が探求される。

1932年

【融合】 Haar測度の発見

Haarが、局所コンパクト (locally compact) な位相群上に自動的に不変測度 (Haar measure) が存在することを証明。位相構造から測度が必然的に生み出される。

1933年

【応用】 Kolmogorovによる確率論の公理化

確率論が測度空間として定式化され、その無限次元への拡張に位相空間のコンパクト性が活用される。

1940年代 - 1950年代

【逆転】 Bourbaki学派と Radon測度の思想

関数解析的手法により、測度を「位相空間上の連続関数への線形写像」として再定義 (Radon measure)。測度と位相が高度に融合。

7. 参考文献 (References)

- Cantor, G. (1884). *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. 6. Mathematische Annalen, 23, 453–488. [[DigiZeitschriften](#)]
- Borel, É. (1898). *Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars. [[Internet Archive](#)]
- Baire, R. (1899). *Sur les fonctions de variables réelles*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 3(1), 1–123. [[Springer](#)]
- Lebesgue, H. (1902). *Intégrale, longueur, aire*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 7(1), 231–359. [[Internet Archive](#)]
- Fréchet, M. (1906). *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1–72. [[Springer](#)]
- Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit & Comp. [[Internet Archive](#)]
- Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer.
- Bourbaki, N. (1952). *Éléments de mathématique. Intégration*. Hermann.